

面向压缩感知的块稀疏度自适应迭代算法

付 宁, 乔立岩, 曹离然

(哈尔滨工业大学自动化测试与控制系, 哈尔滨工业大学 3033 信箱, 黑龙江哈尔滨 150080)

摘 要: 块稀疏信号是一种典型的稀疏信号, 目前在块稀疏信号的压缩感知问题中, 大多数信号重构算法要求信号的块稀疏度已知且算法复杂度高. 针对实际应用中信号块稀疏度未知的情况, 提出了一种块稀疏度自适应迭代算法, 用于信号重构. 首先, 该算法初始化一个块稀疏度, 其值按设定步长进行增加. 对每一个块稀疏度的迭代, 算法都会找到信号支撑块的一个子集, 并修正更新上一次找到的信号支撑块, 最后找到信号的整个支撑块, 从而重构出源信号. 该算法不需要信号的块稀疏度作为先验知识, 而且算法复杂度低. 仿真实验表明, 该算法的重构概率较已有大多数块稀疏信号重构算法的重构概率高, 在块稀疏信号的压缩感知问题中具有实际意义.

关键词: 压缩感知; 块稀疏; 自适应; 重构概率

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 3A-075-05

Block Sparsity Adaptive Iteration Algorithm for Compressed Sensing

FU Ning, QIAO Li-yan, CAO Li-ran

(Department of Automatic Test and Control, Harbin Institute of Technology, P. O. Box 3033, Harbin, Heilongjiang, 150080 China)

Abstract: Block-sparse signal is a typical sparse signal. Among the block-sparse signal problems for compressed sensing, the most existing recovery algorithms require block sparsity as prior knowledge and have a high complexity. In this paper, a block sparsity adaptive iteration algorithm for compressed sensing has been proposed when the block sparsity is unknown. Firstly, the algorithm initializes a block sparsity which will increase by steps. Subsequently, for each block sparsity, a sub-set of the signal support set can be determined by the algorithm, which updates the previous one, until the exact support set is acquired, finally the original signal can be reconstructed through the exact support set. This algorithm doesn't require block sparsity as prior knowledge and has a low complexity. Simulation results demonstrate its high recovery probability than most existing algorithms, which makes it a promising for practical block-sparse signal compressed sensing task.

Key words: compressed sensing; block-sparse; adaptive; recovery probability

1 引言

压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 是 2006 年由 Candès, Romberg, Tao 和 Donoho 等人提出的一种新的信号采样理论^[1,2]. CS 理论指出: 当信号具有稀疏特性时, 可以通过远小于信号长度的少量观测值来精确重构源信号. CS 理论将信号的采样和压缩结合成一步对信号进行编码, 在一定程度上打破了传统奈奎斯特采样定理的极限, 减轻了硬件处理的负担.

标准的 CS 框架是在未知向量满足稀疏性的条件下, 从欠定方程组中得到未知向量的恢复. 自 CS 理论建立起来后, 已经提出了很多有效而精确的重构算法, 比较有代表性的包括针对线性规划的基追踪 (Basis Pursuit, BP) 算法^[3]以及贪婪算法^[4~6]等. 但是标准的 CS 框架下没有考虑到信号的结构, 对于某些类型的稀疏信

号, 标准 CS 理论下的算法重构概率低. 文献[7]指出了实际中的一种典型稀疏信号——块稀疏信号 (Block-sparse Signal), 即, 信号值不为零的地方是成块出现的. 基于信号的这种特性, Eldar 等人进行了深入研究, 建立了块稀疏信号下的压缩感知理论框架, 并提出了一系列重构算法. 文献[8]中指出, 块稀疏信号的重构可以看成是一个混合 l_2/l_1 范数的优化问题 (Mixed l_2/l_1 -norm Optimization Program, L-OPT), 并通过标准凸优化的软件包可以求解, 此算法可以看出是 BP 算法的在块稀疏信号中的拓展. 由于基于 BP 算法的复杂度高, 文献[9]又将匹配追踪 (Matching Pursuit, MP)、正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP) 拓展到块稀疏信号中, 提出了块稀疏匹配追踪 (Block MP, BMP) 以及块稀疏正交匹配追踪 (Block OMP, BOMP). 由于 L-OPT、BMP 以及 BOMP 利用了信号的块稀疏特性, 把信号的每个块都当成一个

整体进行运算,因此块稀疏度比传统意义下的稀疏度更小,文献中的实验表明这些算法较传统意义下的稀疏重构算法有更好的效果.但是,这些算法复杂度较高且要求信号的块稀疏度作为先验知识,然而,块稀疏度在实际信号的压缩感知问题中是未知的,获取并不容易.

针对实际块稀疏信号中块稀疏度未知的特点,本文提出了一种块稀疏度自适应迭代算法.该算法只需初始化一个块稀疏度,并设定一个步长进行增加,对每一个块稀疏度,算法都会找到信号支撑块的一个子集,并利用回溯思想修正更新上一次找到的信号支撑块.最终在迭代收敛条件满足的情况下,找到整个信号支撑块,从而重构出源信号.仿真实验表明,本文算法有效,且重构概率有了提高.

2 压缩感知以及块稀疏信号

2.1 压缩感知

信号的稀疏表示是 CS 理论应用的前提,CS 理论是对传统编解码思想的重要突破,CS 理论将采样和压缩结合成一步对信号进行编码,利用信号的稀疏性,对信号以远低于奈奎斯特采样率进行非自适应的测量编码,进行传输后通过一定的算法进行解码重构.

为使问题简化,考虑稀疏度为 K 的离散实信号 \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \|\Psi^T \mathbf{x}\|_0 \leq K \ll N \quad (1)$$

其中 N 为信号长度, $\|\cdot\|_0$ 表示信号的 0-范数,即信号值不为 0 的个数. Ψ 为信号的稀疏基.可以找到它的 m 次测量:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (2)$$

其中 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times N}$ 为与 Ψ 不相关的测量矩阵,且 $m < N$. 在拥有了观测向量 \mathbf{y} 和测量矩阵 Φ 的情况下,当 Φ 满足有限等距性质 (Restricted Isometry Property, RIP) 时,可以用 0-范数意义下的优化问题来重构或逼近源信号 $\mathbf{x}^{[1]}$:

$$\arg \min \|\Psi^T \mathbf{x}\|_0, \text{ s.t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3)$$

2.2 块稀疏信号理论

考虑另外一种类型的稀疏信号——块稀疏信号 (Block-sparse Signal),其定义如下^[7]:

$$\mathbf{x} = \left[\underbrace{x_1, \dots, x_d}_{\mathbf{x}^{[1]}}, \underbrace{x_{d+1}, \dots, x_{2d}}_{\mathbf{x}^{[2]}}, \dots, \underbrace{x_{N-d+1}, \dots, x_N}_{\mathbf{x}^{[M]}} \right]^T \quad (4)$$

其中 $N = Md$, $\mathbf{x}^{[l]}$, ($l = 1, \dots, M$) 为一子块.为简化问题,假设 $\mathbf{x}^{[l]}$ 等长.如果向量 \mathbf{x} 称为块 K 稀疏信号,则 $\mathbf{x}^{[l]}$ 至多有 K 个不为 0 的 l_2 范数.当 $d = 1$ 时,块稀疏即退化成式(1)所描述的一般意义下的稀疏.

实际中块稀疏信号的形式是很多的,如多波段信

号 (multi-band signal)、DNA 阵列 (DNA microarray)、雷达脉冲信号 (radar pulse signal) 以及多测量向量问题 (multiple measurement vector problem, MMV) 等等^[9].研究这些具有特定结构的稀疏信号重构算法具有重要意义.

2.3 重构算法

对于压缩感知中块稀疏信号的重构问题,文献[8, 9]提出了三种典型算法,目前块稀疏信号的重构主要基于这三种方法,下面给予简单介绍.

(1) 混合 l_2/l_1 范数优化 (Mixed l_2/l_1 -norm Optimization Program, L-OPT) 算法.该算法主要是解决下面的优化问题^[8]:

$$\min \sum_{l=1}^M \|\mathbf{x}^{[l]}\|_2, \text{ s.t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (5)$$

然后可以转化为一个凸优化工具包 (convex second order cone program, SOCP) 能解决的二次锥规划问题^[10]:

$$\begin{aligned} \min \sum_{l=1}^M t_l \\ \text{s.t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \\ t_l \geq \|\mathbf{x}^{[l]}\|_2, t_l \geq 0, 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (6)$$

(2) 块稀疏正交匹配追踪 (Block-sparse Orthogonal Matching Pursuit, BOMP) 算法.该算法主要步骤如下^[9]:

(a) 初始化残差 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 在第 l 步 ($l \geq 1$) 迭代的时候,选择与残差 \mathbf{r}_{l-1} 最匹配的块:

$$i_l = \arg \max_i (\text{mean}(|\Phi^T[i] \mathbf{r}_{l-1}|)) \quad (7)$$

其中 mean 表示求均值.

(b) 确定 i_l 后,寻找估计信号 \mathbf{x} .

$$\mathbf{x} = \Phi_{i_l}^+ \mathbf{y} \quad (8)$$

其中 I 表示 i_j 的集合, $1 \leq j \leq l$.

(c) 更新残差:

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{y} - \Phi \mathbf{x} \quad (9)$$

直到 \mathbf{r}_l 的 l_2 范数小于设定的迭代误差时,算法结束.

(3) 块稀疏匹配追踪 (Block-sparse Matching Pursuit, BMP) 算法^[9],该算法第一步和 BOMP 相同,但 BMP 通过下式更新残差:

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{r}_{l-1} - \Phi[i_l] \Phi^+ [i_l] \mathbf{r}_{l-1} \quad (10)$$

BMP 更新残差没有采用正交化的思想.下面给出 BOMP 和 BMP 算法框图.

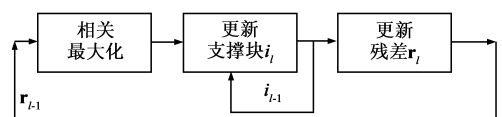


图1 BOMP和BMP算法框图

从算法框图可以看出,算法主要由三部分构成:相关测试、更新信号支撑块、更新残差.其中算法在每次相关测试时只找到信号支撑的一个块,对于块稀疏度为 K 的信号,至少要进行 K 次迭代才能恢复源信号,要

求块稀疏度 K 已知;且每次迭代找到信号支撑的一个块后,便不再改变,对于错误的支撑块,算法没有修复能力,导致信号的重构概率不高.

3 本文算法

针对实际中信号块稀疏度未知的特点,本文提出了一种块稀疏度自适应迭代算法,主要思想是通过初始化块稀疏度,并随步长进行增加,对每一个块稀疏度的迭代,算法都会找到信号支撑块的一个子集,并利用回溯思想修正更新上一次找到的支撑块,最后找到信号的整个支撑块,从而达到重构源信号的目的.算法框图如下:

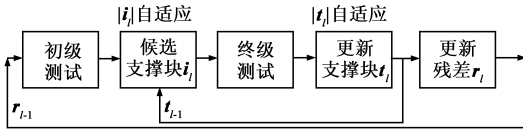


图2 本文算法框图

根据框图,下面对此算法的具体步骤进行详细阐述.

3.1 算法步骤

(1) 设定算法输入:测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times N}$, 观测信号 \mathbf{y} , 初始化块稀疏度 k , 算法迭代误差 δ , 分块向量 \mathbf{G} , 分块向量的确定如下,对于式(4)描述的块稀疏信号,分块向量为:

$$\mathbf{G} = [\underbrace{1, \dots, 1}_d, \underbrace{2, \dots, 2}_d, \dots, \underbrace{M, \dots, M}_d]^T \quad (11)$$

并初始化残差值 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, 初始化信号支撑块 $\mathbf{t}_0 = \phi$, 步长 $step = 1$, 信号支撑块大小 $S = k$, 重构向量 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$;

(2) 初级测试:第 l 次迭代时, $l \in \{1, 2, \dots, M\}$, 选择与残差 \mathbf{r}_{l-1} 最匹配的子空间 \mathbf{i}_l , 具体操作为:

$$\mathbf{i}_l = \arg \max_S (\text{mean}(|\Phi^T[\mathbf{i}] \mathbf{r}_{l-1}|)) \quad (12)$$

即测量矩阵的每一块与残差进行内积操作后,取绝对值后再平均,最后选择最大的 S 个值的标号赋值给 \mathbf{i}_l , 这里的序号对应分块向量 \mathbf{G} 中的分组号 $(1, 2, \dots, M)$;

(3) 回溯:

$$\hat{\mathbf{t}}_l = \mathbf{t}_{l-1} \cup \mathbf{i}_l \quad (13)$$

(4) 终极测试:计算信号支撑块的估计 \mathbf{t}_l :

$$\mathbf{t}_l = \arg \max_S (\text{mean}(|\Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l}^+ \mathbf{y}|)) \quad (14)$$

其中 $\Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l}^+ = (\Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l}^T \Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l})^{-1} \Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l}^T$ 为 $\Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l}$ 的伪逆. $\Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l}$ 为 $\hat{\mathbf{t}}_l$ 对应的测量矩阵 Φ 的列向量组成的矩阵. 且 $\mathbf{t}_l \subset \hat{\mathbf{t}}_l$.

(5) 计算残差 \mathbf{r}_l :

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{y} - \Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l} (\Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l}^+ \mathbf{y}) \quad (15)$$

(6) 若 $\|\mathbf{r}_l\|_2 \geq \|\mathbf{r}_{l-1}\|_2$, 则: $step = step + 1$; $S = step \times S$, 返回步骤(2), 否则直接返回步骤(2).

(7) 当迭代次数大于分组数(即分块向量 \mathbf{G} 中的最

大值)或者残差小于算法迭代误差 δ 时,迭代结束. 输出重构向量 $\hat{\mathbf{x}}$, 满足:

$$\hat{\mathbf{x}} = \Phi_{\hat{\mathbf{t}}_l}^+ \mathbf{y} \quad (16)$$

3.2 算法复杂度分析

算法复杂度方面,由算法原理知本文算法的复杂度和初始化块稀疏度有关,为直观地说明本文算法复杂度大小,采用文献[5]中的实验测试方法.实验设置如下:

(1) 测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times N}$ 为高斯分布, $m = 256$, $N = 512$, 分块大小 $d = 4$. 其中块稀疏度 $K = 1, 2, \dots, 30$. 随机选定 K 个块,分别在这 K 个块上赋值得到所需的仿真测试信号 \mathbf{x} (幅度采用高斯分布或 0-1 信号).

(2) 分别设置 $k = 1$ 或 $k = K$ 下两种情况,对每个块稀疏度 K , 算法精确重构 200 次. 得到算法的平均迭代次数.

图 3、图 4 分别给出了算法设置 $k = 1$ 和 $k = K$ 时平均迭代次数随信号块稀疏度的变换曲线:

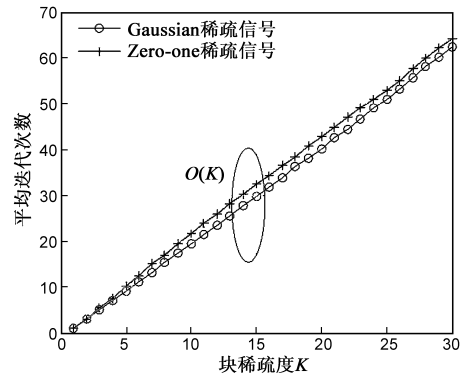


图3 $k=1$ 时本文算法平均迭代次数

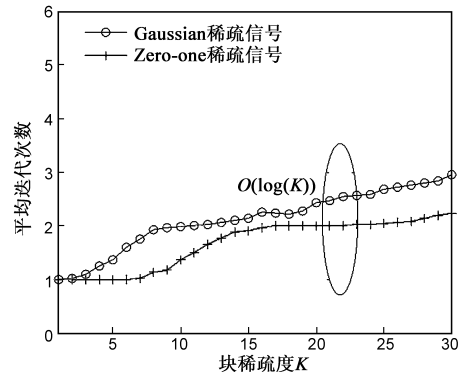


图4 $k=K$ 时本文算法平均迭代次数

图中表明,当 $k = 1$ 时,本文算法平均迭代次数满足 $n_{it} = O(K)$. 当 $k = K$ 时,平均迭代次数满足 $n_{it} = O(\log K)$, 所以在精确重构的条件下,本文算法的复杂度可以较好地估计. 由于本文算法的复杂度主要集中在初级测试的相关最大化 (Correlation Maximization, CM) 操作上^[5], 算法每次迭代进行 CM 运算需要 $m \times N$ 次乘法, 因此算法总的复杂度可以控制在 $O(mN \log K)$ 和

$O(mNK)$ 之间.

比较其他三种算法, L-OPT 是基于线性规划 (Linear Program, LP) 的算法, 其复杂度与 BP 算法相当, 为 $O(N^3)$, BMP 和 BOMP 属于贪婪算法, BOMP 算法需要 K 次迭代才能重构源信号, 复杂度与 OMP 算法相当, 为 $O(KmN)$, 而 BMP 比 BOMP 少施密特正交化这一步, 所以其复杂度也可以控制在 $O(KmN)$ 以内. 因此在复杂度方面, 本文算法比 L-OPT、BMP 和 BOMP 算法均有一定的优势.

4 实验验证

本实验将本文算法和 L-OPT、BMP、BOMP 算法分别应用于块稀疏信号的重构, 计算每一种方法的重构概率进行对比.

仿真实验按以下步骤进行:

(1) 随机产生一个高斯分布测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times N}$, 给定分块大小 d 以及块稀疏度 K , 随机选定 K 个块, 分别在这 K 个块上赋值得到所需的仿真测试信号 (幅度采用高斯分布或 0-1 信号).

(2) 通过式(2)得到观测信号 $y = \Phi x$, 利用每种重构算法得到重构信号 \hat{x} , 若 $\|\hat{x} - x\|_2 < 10^{-5}$ 则重构成功.

(3) 对每种重构算法运行 500 次, 并计算重构概率.

本实验过程中, 分别采用幅值为高斯分布的信号和 0-1 的二值信号进行实验. 测量矩阵行数 $m = 80$, 列数 $N = 160$, 分块大小 $d = 8$, 源信号的块稀疏度 $K = 1, 2, \dots, 12$, 计算每种算法在不同 K 值下的重构概率, 并绘制重构概率随块稀疏度的变化曲线. 实验结果如图 5 所示.

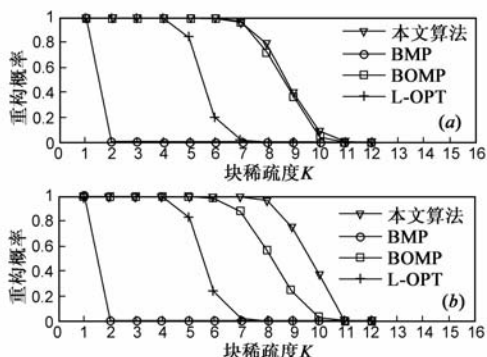


图5 仿真实验结果

其中图 5(a) 为幅值为高斯分布的信号实验结果, 图 5(b) 为 0-1 的二值信号实验结果. 从图中可见, 虽然本文不需要已知块稀疏度, 但无论对于哪类块稀疏信号, 本文算法的重构概率比其他三种方法都有提高; 尤其对于 0-1 的二值信号, 本文算法的重构概率有显著提高. 这是因为算法使用了回溯思想, 在这种思想框架

下, 算法首先寻找到与空间 Φ_i 最接近的块, 在下次迭代时通过回溯又得到相同数量的块, 然后通过式(14)的最小均方准则判定, 若上一次迭代寻找到的块到空间 Φ_i 的距离比其他 S 个块更大, 则算法会将这些块排除到信号支撑块外. 因此本文算法具有修正信号支撑块的作用, 所以重构概率较 BMP 和 BOMP 算法更高.

5 结论

本文提出了一种新的面向压缩感知的块信号重构算法——块稀疏度自适应迭代算法. 此方法通过初始化解块稀疏度, 并在每次迭代之后块稀疏度随步长增加, 利用回溯思想不断地估计和更新源信号的支撑块, 最终找到源信号的整个支撑块, 重构出源信号. 该算法不需要信号的块稀疏度作为先验知识, 且复杂度低. 实验表明, 对于压缩感知问题中的块稀疏信号重构, 其重构概率较高, 对于块稀疏信号的处理具有实际意义.

参考文献

- [1] E Candès, J Romberg, Terence Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(2): 489 - 509.
- [2] D L Donoho. Compressed sensing [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [3] E Candès, Terence Tao. Decoding by linear programming [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2005, 51 (12): 4203 - 4215.
- [4] J A Tropp, A C Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4655 - 4666.
- [5] W Dai, O Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 - 2249.
- [6] T T Do, L Gan, N Nguyen, T D Tran. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing [A]. In Proceedings of the 42th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers [C]. Pacific Grove, California, 2008. 581 - 587.
- [7] R G Baraniuk, V Cevher, M F Duarte, C Hegde. Model-based compressive sensing [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2010, 56(4): 1982 - 2001.
- [8] Y C Eldar, M Mishali. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2009, 55(11): 5302 - 5316.
- [9] Y C Eldar, P Kuppinger, H Bölcskei. Compressed sensing of block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(6): 3042 -

3054.

- [10] M Lobo, L Vandenberghe, S Boyd. Applications of second-order cone programming [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1998, 284(1-3): 193-228.

作者简介



付 宁 男, 1979 年出生于河南省鹤壁市, 博士, 哈尔滨工业大学自动化测试与控制系讲师, 主要研究方向为压缩感知理论、盲信号处理、自动测试技术等。

E-mail: funinghit@163.com



乔立岩 男, 1973 年出生于黑龙江省哈尔滨市, 回族, 博士, 哈尔滨工业大学自动化测试与控制系教授, 主要研究方向为进化算法、模式识别、故障诊断技术等。

E-mail: qiaoliyan@163.com



曹离然 男, 1987 年出生于四川省内江市, 在读硕士研究生, 主要研究方向为压缩感知算法、盲信号处理等。

E-mail: liran4538@hotmail.com